第 49 章

49.1 (a) 電流の流れる向きを y 軸の正方向とすると，電流は y 成分だけなので，$\boldsymbol{A}$ も y 成分だけである．したがって，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ は $B_x=-\frac{\partial A_y}{\partial z}$ となる．この左辺の B_x に問(b)の③の B を代入して積分すればよい．
(b) 時間 Δt の間にシート上に存在する電荷は $\Delta q=\sigma(v\Delta t)d$ だから，シートを流れる電流は $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\sigma vd$. したがって，単位長さ当たりの電流密度は $J=\frac{I}{d}=\sigma v\cdots$①．アンペールの法則 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\mu_0 I_C\cdots$② を適用して線積分を計算するために，シートを囲む長方形(長辺 l)の経路を考える．シートに平行な辺の長さは l だから②は $2lB=\mu_0 Jl$ となるので，$B=\frac{\mu_0\sigma v}{2}\cdots$③ を得る．磁場の向きは x 軸の正方向である．

49.2 ビオ-サバールの法則 $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids}{r^2}\sin\theta\cdots$① を使う．
(a) $\theta=0$ だから l の寄与はない．
(b) 半円部分(長さ πr)を流れる電流の作る磁場だから①を積分すればよい．したがって，$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi r}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{4r}$.

49.4 (a) 長さ a の直線電流 I が，その直線から距離 R の点に作る磁場は $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}[\cos\theta_1-\cos\theta_2]\cdots$①．ここで，$\theta_1$ と θ_2 は直線の両端から見た点 P の仰角である．ループの中心軸を x 軸，原点を正方形の平面上にとり，正方形の一辺(長さ a)の中点 Q から x 軸上の点 P までの距離を R として，①を適用すれば $R=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$, $\cos\theta_1=-\cos\theta_2=\frac{a/2}{\sqrt{x^2+\frac{a^2}{2}}}$ である．これらを①に代入すると $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}\frac{a}{\sqrt{x^2+\frac{a^2}{2}}}\cdots$②．磁場は PQ に直交する方向を向いている．このため，水平方向の成分は反対側の直線電流の作る磁場と相殺するから，垂直成分しか寄与しない．それが 4 個あるので，点 P で作られる磁場 $B(P)$ は

$$B(P)=4B\frac{a/2}{\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi(x^2+\frac{a^2}{4})\sqrt{x^2+\frac{a^2}{2}}}$$

となる．磁場の向きは x 軸の正方向である．
(b) ベクトルポテンシャルを使って，①を導くことにする．直線電流 I (長さ a)の点 P に作るベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A}(P)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_A^B\frac{d\boldsymbol{s}}{r}\cdots$③．電流は x 軸に沿って流れているので，$d\boldsymbol{s}$ は x 方向の成分をもつ．そのため，$\boldsymbol{A}(P)$ は x 成分 $A_x(R)$ だけをもっている($A_y(R)=A_z(R)=0$)．したがって，$A_x(R)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{b}\frac{ds}{\sqrt{s^2+R^2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\log\frac{\sqrt{b^2+R^2}+b}{\sqrt{a^2+R^2}-a}\cdots$④．ここで，積分の下限 $-a$ は中点 Q を原点にしたときの端点 A の x 座標で，b は端点 B の x 座標である．磁場 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ は円筒座標を用いて計算すればよい．いま($A_y(R)=A_z(R)=0$ のため) $A_R=0$, $A_\phi=0$ だから，$B_\phi=-\frac{\partial A_x}{\partial R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}}\right)\cdots$⑤ を得る．幾何学的に $\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}=\cos\theta_1$，$\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}}=-\cos\theta_2$ であるから，⑤は①と同じものになる．

49.6 球内の磁場 $B_{内部}$ を求めるために，半径 a の球面上の電荷密度を σ として，$a\,d\theta$ の円輪(面積 $dS=2\pi a^2\sin\theta\,d\theta$)上の電気量 σdS が ω で回転していると仮定する．このとき，z 軸を含む面を毎秒 $\omega/2\pi$ 回通過するから，電流 $dI=(\sigma dS)(\omega/2\pi)=\sigma a^2\omega\sin\theta\,d\theta\cdots$① の円形電流が生じる．半径 $r=a\sin\theta$ の円形電流①が，z 軸上の点 P に作る磁場 dB は $dB=\frac{\mu_0 r^2 dI}{2R^3}=\frac{\mu_0\sigma a^4\omega\sin^3\theta\,d\theta}{2R^3}\cdots$②．ここで分母の R は円形電流から点 P までの距離．導体球表面上の全電荷が作る電流による磁場は②を積分すれば求まる．$R^2=z^2+a^2-2az\cos\theta$ より $RdR=az\sin\theta\,d\theta$ なので磁場は $B(P)=\frac{\mu_0\sigma a^4\omega}{2}\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta}{R^3}\,d\theta=\frac{\mu_0\sigma a^4\omega}{2az}\int_{a-z}^{a+z}\frac{1}{R^3}\left[1-\left(\frac{a^2+z^2R^2}{2za}\right)^2\right]R\,dR=\frac{2}{3}\mu_0\sigma a\omega$. ここで，$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}=\frac{CV}{4\pi a^2}=\frac{(4\pi\epsilon_0 a)V}{4\pi a^2}=\frac{\epsilon_0 V}{a}$ を使って書き換えれば，$B_{内部}=\frac{2\omega V}{3c^2}$ を得る．

第 51 章

51.1 電磁誘導の法則の $2\pi rE=\pi r^2\dot{B}$ から $E=\frac{r}{2}\dot{B}\cdots$①．電子の運動方程式 $ma=qE$ と①より，加速度の大きさは $a=\frac{qE}{m}=\frac{qr}{2m}\dot{B}$. P_2 は $r=0$ だから $a=0$. P_1 と P_3 は $r=5\times10^{-2}$ m だから $\dot{B}=-10^2$ T/s より $a=\frac{qr}{2m}\dot{B}=\frac{(1.6\times10^{-19}\text{C})(5\times10^{-2}\text{m})}{2\times(9.11\times10^{-31}\text{kg})}(-10^2\ \text{T/s})=4.4\times10^7\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$.

51.2 (a) 磁束 $\Phi=BA\cos\omega_V t$ を使って誘導起電力 $V=-\dot{\Phi}\cdots$① を計算する．面積 $A=\frac{\pi r^2}{2}$ と振動数 $\omega_V=2\pi f$ を①に代入すると，$V=\pi^2 r^2 fB\sin(2\pi ft)=V_0\sin(2\pi ft)$.
(b) オームの法則より $I_0=\frac{V_0}{R_M}$.

51.3 ループ(1)による磁場は $B=\frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}\approx\frac{\mu_0 Ia^2}{2R^3}$. ループ(2)を通る磁束は $\Phi=BA\cos\omega t$. 面積 $A=\pi a^2$ に注意して誘導起電力 $\mathcal{E}=-\dot{\Phi}$ を計算すればよい．

51.4 (a) 運動方程式 $m\dot{v}=IBd\cdots$① より，速さ v は $v(t)=\frac{IBd}{m}t+v_0$. ただし，$v_0=0$.
(b) 電池の置き換えによる電流を $I'=\frac{Bvd}{R}$ とすると，①は $m\dot{v}=IBd-I'Bd=IBd-\frac{B^2d^2}{R}v\cdots$② となる．$v=v_{終端}$ と置くと，②の左辺はゼロになるので，右辺から $v_{終端}=\frac{\mathcal{E}}{Bd}$ を得る．微分方程式②を解けば $v(t)=\frac{RI}{Bd}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{\mathcal{E}}{Bd}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\cdots$③. ただし，$\tau=\frac{mR}{B^2d^2}$.
(c) $I(t)=\frac{Bd}{R}v(t)$ に③を代入すると $I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}v(t)$. $t\to\infty$ で $I_{終端}=\frac{\mathcal{E}}{R}$.

51.5 (a) コイルに電流 I を流すには，電源の仕事 W が必要である．2 つのコイルに流れる電流の向きが同じ場合，